Баяк И.В.

О внутренней структуре внешней алгебры

Резюме: Показано, что структура внешней алгебры является производной от функтора из категории произведений линейных пространств в категорию кососимметричных тензорных пространств

Поскольку формулировка искомого функторного построения требует предварительного освещения некоторых комбинаторных вопросов, то в рамках этого требования, пусть $I = \{1,..,n\}$, $J = \{1,..,m\}$, $n,m \in N$, $1 \le m \le n$; вместе с тем $[J] \equiv \left[i_1,..,i_j,..,i_m\right] : I \to J$ - произвольная сюръекция, т.е. размещение с разрешенным повторением; $\langle J\rangle \equiv \left\langle i_1,..,i_j,..,i_m\right\rangle : J \to I$ - произвольная инъекция, т.е. размещение без повторений; $(J) \equiv \left(i_1,..,i_j,..,i_m\right) : J \to I$ - произвольная упорядоченная инъекция, т.е. сочетание из n по m, иначе говоря (J) - есть инъекция, производная от такой инъекции $\langle J\rangle$, в которой $i_{j-1} < i_j$. Если $I^* \subseteq I$, $\operatorname{card} I^* = m$, $I^* = (J)$, кроме того, определено, что $b{:}I \to I$ - произвольная биекция, $b^*{:}I^* \to I$ - произвольная инъекция, тогда имеем изоморфизм $B^* \equiv \left\{\left\langle I^* \middle| I\right\rangle\right\} \equiv \left\{\langle J|I\rangle\right\} \equiv \left\{b^*\right\} \approx \left\{b\left(I^*\right)\right\}$. Пусть теперь b - транспозиция, тогда $b\left(I^*\right)$ - транспозиция по месту I^*, которая есть или элементарная перестановка внутри I^*, т.е. $b^{j+1}(l) = b^j(m)$, $b^{j+1}(i) = b^j(i)$ для $l,m,i \in I^*$ и $i \ne l \ne m$, или элементарное замещение, т.е. $b^{j+1}(l) = b^j(m)$, $b^{j+1}(i) = b^j(i)$ для $m \in I \setminus I^*$, $l,i \in I^*$ и $i \ne l$, где i - бегущий индекс, j - рекурсивный индекс. В соответствии с этим b^* есть транспозиция, если это элементарная перестановка, т.е. отображение $(l,m,i) \to (m,l,i)$, где $l,m,i \in I^*$ и $i \ne l \ne m$, или элементарное замещение, т.е. отображение $(l,i) \to (m,i)$, где $m \in I \setminus I^*$, $l,i \in I^*$ и $i \ne l$, а четность размещения b^* определяется числом $(-1)^{\sigma\left(b^*\right)}$, где $\sigma\left(b^*\right)$ - количество транспозиций для перехода от e^* к b^*, где e^* - тождественное отображение.

Таким образом, если дано $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in I}$, $A\left(I^*\right) = \left(a_{ij}\right)_{i\in I^*,\, j\in I}$, то определен детерминант подмножества строк квадратной матрицы, а именно $\det\left(A\left(I^*\right)\right) \equiv \sum_{b^*\in B^*} \prod_{i\in I^*} a_{ib^*(i)}(-1)^{\sigma\left(b^*\right)}$. Итак, имеем: $(-1)^{\sigma\langle J\rangle}$ - четность инъекции $\langle J\rangle : J \to I$, где $e : J \to J$, $\left(j \to j\right)$; $(-1)^{\sigma\left\langle I^* \middle| I\right\rangle} \equiv (-1)^{\sigma\langle J|I\rangle} \equiv (-1)^{\sigma\left(b^*\right)}$ - четность инъекции $\left\langle I^* \middle| I\right\rangle : (J) \to I$, где $e :\ (J) \to (J)$, $\left(i_j \to i_j\right)$; наконец, $(-1)^{\sigma\left\langle J^* \middle| J\right\rangle}$ - четность инъекции $\left\langle J^* \middle| J\right\rangle :\ \left(J^*\right) \to (J)$, где $\left(J^*\right) \subseteq (J)$, а тождественное отображение

есть $e:\quad (J^*)\to(J^*),\ \left(i_j^*\to i_j^*\right)$, заметим при этом, что $\langle J|J\rangle$ - биекция, а $(-1)^{\sigma\langle J|J\rangle}$ - ее четность.

Далее пусть определено, что L - n-мерное линейное пространство над R, а $\left(\bar{e}^i\right)_{i\in I}$ - его базис. Тогда существует функтор, переводящий $\prod_{i\in I} L^i$ в тензорное линейное пространство $T^m L$, а именно $F_m^T : L^n \to T^m L$: $\prod_{j\in I}\bar{x}_j = \prod_{j\in I}\sum_{i\in I} x_{ij}\bar{e}^i \to \sum_{\{[J]\}}\prod_{i_j\in[J]} x_{ij}\bar{e}^{[J]} = \sum_{\{[J]\}} t_{[J]}e^{[J]}$, а также - в кососимметричное тензорное линейное подпространство $\Lambda^m L$, а именно $F_m^\Lambda : L^n \to \Lambda^m L$: $\prod_{j\in I}\bar{x}_j = \prod_{j\in I}\sum_{i\in I} x_{ij}\bar{e}^i \to \sum_{\{(J)\}}\det X\left(I^*\right)\bar{e}^{(J)} = \sum_{\{(J)\}}\lambda_{(J)}\bar{e}^{(J)}$. При этом, сужение L^n в L^m таким образом, что $\Gamma_{(J)}^m : L^n \to L^m$: $L^{(i_1}\times..\times L^{i_j}\times..\times L^{i_m)}$: $\prod_{i\in I}\bar{x}_i \to \prod_{i_j\in(J)}\bar{x}_{i_j}$, индуцирует функтор ограничения $F_m^\Lambda\circ\Gamma_{(J)}^m$ в пространство простых поливекторов типа $R\cdot\bar{e}^{(J)}$, так что пространство образов $\left\{\gamma_{(J)}^m\right\} = \Gamma_{(J)}^m\left(L^n\right)$ следует сопоставлять с пространством простых граней. Однако, помимо $\Gamma_{(J)}^m$, существует такое отображение $\Gamma_{\langle J\rangle}^m : L^n \to L^m$: $L^{\langle i_1}\times..\times L^{i_j}\times..\times L^{i_m\rangle}$: $\prod_{i\in I}\bar{x}_i \to \prod_{i_j\in\langle J\rangle}\bar{x}_{i_j}$, что $F_m^\Lambda\circ\Gamma_{\langle J\rangle}^m = R\cdot\bar{e}^{\langle J\rangle}$, где $\bar{e}^{\langle J\rangle} = (-1)^{\sigma\langle J|J\rangle}\bar{e}^{(J)}$, и для которого поэтому имеет место расслоение $\Gamma_{\langle J\rangle}^m \to \Gamma_{\langle J\rangle}^m\times\{\pm 1\}$: $\pm 1 = (-1)^{\sigma\langle J|J\rangle}$. Таким образом, $F_m^\Lambda\circ\coprod_{\{\langle J|J\rangle\}}(-1)^{\sigma\langle J|J\rangle}\Gamma_{\langle J\rangle}^m \approx\ F_m^\Lambda\circ\Gamma_{(J)}^m$, так что, если $\gamma_{\langle J\rangle}^m\in\Gamma_{\langle J\rangle}^m$ и $J\equiv i_{(J)}\in N$ а $\gamma_J^m = \coprod_{\{\langle J|J\rangle\}}(-1)^{\sigma\langle J|J\rangle}\gamma_{\langle J\rangle}^m$, где каждому γ_J^m соответствует произвольный элемент $\gamma_{(J)}^m$, образующий для семейства $\left\{\gamma_{\langle J\rangle}^m\right\}_{\{\langle J|J\rangle\}}$, то существует функтор, переводящий семейство $\left\{\gamma_J^m\right\}_K$, где $K\subseteq N$, в категорию абелевых групп, а именно $\Gamma^m\equiv F_{Ab}\left(\left\{\gamma_J^m\right\}_K\right)$, т.е. $\gamma^m = \sum_K z_J\gamma_J^m$, где $z_J\in Z$. Вместе с тем, всякий образующий элемент Γ^m геометрически сопоставляется с пучком ориентированных рамок грани $\gamma_{(J)}^m$, намотанных по контуру ребер, а всякий элемент группы Γ^m ассоциируется с цепью, составленной из z_J раз намотанных пучков γ_J^m. Кроме того, если определить, что $\langle J*\rangle\equiv\ \left\langle J^*\right\rangle, i_m =$ $\left\langle i_1,..,i_j,..,i_{m-1}\right\rangle, i_m$; $\langle *J\rangle\equiv i_1,\left\langle J^*\right\rangle =\ i_1,\left\langle i_2,..,i_j,..,i_m\right\rangle$; $\gamma_{J*}^m =\ \coprod_{\left\{\left\langle J^*|J^*\right\rangle\right\}}(-1)^{\sigma\left\langle J^*|J^*\right\rangle}\gamma_{\left\langle J^*\right\rangle}^m$, где $\left\langle J^*\right\rangle\subset\langle J*\rangle$; $\gamma_{*J}^m =\ \coprod_{\left\{\left\langle J^*|J^*\right\rangle\right\}}(-1)^{\sigma\left\langle J^*|J^*\right\rangle}\gamma_{\left\langle J^*\right\rangle}^m$, где $\left\langle J^*\right\rangle\subset\langle *J\rangle$, то имеет место граничный гомоморфизм $\delta:\Gamma^m\to\Gamma^{m-1}$: $\gamma_J^m \to \pm\sum_{\{J*\}}\gamma_{J*}^{m-1}\mp\sum_{\{*J\}}\gamma_{*J}^{m-1}$, где $\delta\circ\delta:\Gamma^m\to 0$: $\gamma_{J*}^{m-1}\to\pm\sum_{\{*J*\}}\gamma_{*J*}^{m-2}$, $\quad\gamma_{*J}^{m-1}\to\pm\sum_{\{*J*\}}\gamma_{*J*}^{m-2}$, который также имеет

наглядную геометрическую интерпретацию, соответствующую вычислению цепи, собранной из укороченных звеньев. Примечательно также, что семейство $\left\{\gamma_J^m\right\}_K$ порождает не только свободную абелеву группу, но и свободный R-модуль $\Lambda^m = \coprod_K \Lambda_J^m$, где $\Lambda_J^m \equiv x_J \cdot F_m^\Lambda\left(\gamma_J^m\right)$, $x_J \in R$, причем, поскольку всякий образующий поливектор простой, то $\Lambda_J^m = R \cdot \bar{e}^{(J)}$ и $\Lambda^m = \coprod_K R \cdot \bar{e}^{(J)}$, что тривиально.

Однако, если семейство $\left\{\gamma_J^m\right\}_K$ рассматривать как семейство семейств, т.е. разбить его на некоторые, в общем, не произвольные, подсемейства $\left\{\gamma_J^m\right\}_{K_j}$, $j \in K^*$, при условии что $\operatorname{card} K_j \le C_n^m$, так как для каждой пары индексов $J = i_{(J)}$, $J' = i'_{(J)'}$, входящих в K_j, требуем $(J) \ne (J)'$ и как только $(J) = (J)'$, где $J' = J + 1$, то $\gamma_{J'}^m$ переходит в подсемейство K_{j+1}, а затем, следуя этому разбиению, определить, что $\Lambda_j^m = \coprod_{\{(J)\}} x_J \cdot F_m^\Lambda\left(\gamma_J^m\right)$, где $\gamma_J^m \in \left\{\gamma_J^m\right\}_{K_j}$, то имеем $\Lambda^m = \coprod_{K^*} \Lambda^m L$, где $K^* \subseteq N$. Аналогично, для свободной абелевой группы, порожденной семейством семейств, имеем $\gamma^m = \sum_{K^*} z_j \gamma_j^m$, где $\gamma_j^m \equiv \coprod_{K_j} \gamma_J^m$, так что, если $\gamma^m \in \Gamma^m$, то $\lambda^m = F_m^\Lambda\left(\gamma^m\right) = \coprod_{K^*} F_m^\Lambda\left(z_j \gamma_j^m\right) = \coprod_{K^*} \lambda_j^m$, где $\lambda_j^m \in \Lambda^m L$.

Таким образом, продолжая геометрические и отчасти уже физические интерпретации алгебраических конструкций, принимаем, что свободный R-модуль Λ^m следует сопоставлять с пространством эквивалентных приборов, соответствующих цепям из пространства Γ^m. Более того, если L^* дуально к L а $\left\langle \Lambda^m L^* \middle| \Lambda^m L \right\rangle$ - функтор свертки соответствующих пространств, то существует функтор $\left\langle \Lambda^{*m} \middle| \Lambda^m \right\rangle : \Lambda^{*m} \times \Lambda^m \to R$, который следует интерпретировать как вычислитель результата сворачивания цепи воздействий на цепь приборов; так, если $\lambda^{*m} = \coprod_{K^*} \lambda_j^{*m}$, $\lambda^m = \coprod_K \lambda_j^m$, то $\left\langle \lambda^{*m} \middle| \lambda^m \right\rangle = \sum_{K^* \cap K} \left\langle \lambda_j^{*m} \middle| \lambda_j^m \right\rangle$ и есть искомый результат. При этом если $K^* = K$ и задан функтор трансформации цепной суммы $S: \coprod \to \sum \,:\, \oplus \to +$, то $\left\langle \lambda^{*m} \middle| \lambda^m \right\rangle = \left\langle S\left(\lambda^{*m}\right) \middle| S\left(\lambda^m\right) \right\rangle = \left\langle \sum_K \lambda_j^{*m} \middle| \sum_K \lambda_j^m \right\rangle$, что тривиально, поскольку покомпонентно сворачиваются поливектора одного типа. Дополнительно заметим, что если $\Gamma^m = \sum_N z_j \gamma_j^m$, где $\sup\left\{\left|x_{ij}\right|\right\} \to 0$, тогда Γ^m - пространство предельных m-цепей, которое геометрически сопоставляется с пространством m-поверхностей, так что интегрирование полей дифференциальных m-форм по m-поверхностям получает прозрачную физическую интерпретацию в терминах сворачивания бесконечно мелкой цепи воздействий на такую же цепь приборов.

Пусть теперь задан функтор $E: \sum_{i\in I} x_i \bar{e}^i \to \prod_{i\in I} x_i \bar{e}^i$, тогда определена композиция отображений $F_m^{\Lambda} \circ E : L \to \Lambda^m L$, а также $\Gamma_{(J)}^m \circ E:\ L \to L^m$ и $\Gamma_{\langle J\rangle}^m \circ E:\ L \to L^m$, причем $F_m^{\Lambda} \circ \Gamma_{(J)}^m \circ E:\ \sum_{i\in I} x_i \bar{e}^i \to \prod_{i_j\in(J)} x_{i_j} \bar{e}^{(J)}$ и $F_m^{\Lambda} \circ \Gamma_{\langle J\rangle}^m \circ E$: $\sum_{i\in I} x_i \bar{e}^i \to \prod_{i_j\in\langle J\rangle} x_{i_j} \bar{e}^{\langle J\rangle}$, где $\bar{e}^{\langle J\rangle} = (-1)^{\sigma\langle J|J\rangle} \bar{e}^{(J)}$ а $\bar{e}^{(J)} = \left(\bar{e}^{i_1},..,\bar{e}^{i_j},..,\bar{e}^{i_m}\right)$. Поскольку E задает каноническое вложение, то целесообразно ввести новое обозначение, а именно $\Lambda^m E \equiv F_m^{\Lambda} \circ E$, так что $\Lambda^m E$ вкладывается в $\Lambda^m L$; кроме того, принимаем, что $E_{\langle J\rangle}^m \equiv \Gamma_{\langle J\rangle}^m \circ E$, причем $\varepsilon_{(J)}^m = \left(x_{i_1}\bar{e}^{i_1},..,x_{i_j}\bar{e}^{i_j},..,x_{i_m}\bar{e}^{i_m}\right) \in E_{(J)}^m$. Вместе с тем, E индуцирует свободную абелеву группу, сопоставимую с пространством пучков ориентированных граней, а именно, если $\varepsilon^m(\bar{x}) \equiv \coprod_{\{(J)\}} E_{(J)}^m(\bar{x})$, то $E^m = F_{Ab}\left(\left\{\varepsilon^m(\bar{x})\right\}_{\bar{x}\in L}\right)$, т.е. $\varepsilon^m = \sum_{\{\bar{x}\}} z_{\bar{x}} \cdot \varepsilon^m(\bar{x})$, причем $F_m^{\Lambda}\left(\varepsilon^m\right) = \coprod_{\{\bar{x}\}} F_m^{\Lambda}\left(\varepsilon^m`(\bar{x})\right)$ а $S\left(F_m^{\Lambda}\left(\varepsilon^m\right)\right) \in \Lambda^m E$, тем самым установлено соответствие $E^m \to \Lambda^m E$. В свою очередь, если дано гладкое сечение тривиального векторного расслоения $\left(L\times L,\ \omega: L \to L\right)$, то оно задает гладкое сечение расслоения L пространством пучков граней $\left(L\times E^m,\ \Omega^m \equiv \varepsilon^m(\overline{\omega}) : L \to E^m\right)$ и гладкое сечение поливекторного расслоения $\left(L\times \Lambda^m E,\ F_m^{\Lambda}\circ E\circ\omega : L \to \Lambda^m E\right)$. С другой стороны, существует согласованный с внешним произведением оператор сцепления E^m с L, который позволяет определить согласованный с внешней производной дифференциал сечения расслоения пространства пучков граней, а именно $E^m * L:\ E^m \times L \to E^{m+1}$: $\varepsilon^m \times \bar{x} \to \varepsilon^{m+1}$: $\varepsilon_{(J)}^m * \bar{x} = \sum_{i\in I\setminus(J)} \varepsilon_{(J*i)}^{m+1}$, где $\bar{x} = \sum_I x_i \bar{e}^i$, $\varepsilon_{(J*i)}^{m+1} = \left(x_{i_1}\bar{e}^{i_1},..,x_i\bar{e}^i,..,x_{i_m}\bar{e}^{i_m}\right)$, иначе говоря, сочетание $(J*i)$ получаем в результате сцепления (J) и произвольного i из $I\setminus(J)$, так что для дифференциала сечения имеем $d\Omega^m : L \to E^{m+1}$: $d\Omega^m(\bar{x}) = \sum_{j\in I} \varepsilon^m\left(\sum_{i\in I} \frac{\partial\omega_i(\bar{x})}{\partial x_j} \bar{e}^i\right) * \bar{e}^j$. Кроме того, если для согласованного с внутренним произведением оператора проекции E^m по направлению, заданному в L, принять, что $E^m \perp L:\ E^m \times L \to E^{m-1}$: $\varepsilon^m \times \bar{x} \to \varepsilon^{m-1}$: $\varepsilon_{(J)}^m \perp \bar{x} = \sum_{i\in(J)} \varepsilon_{(J)\setminus i}^{m-1}$, где $\varepsilon_{(J)\setminus i}^m = \left(x_i \cdot x_{i_1}\bar{e}^{i_1},..,0\cdot x_i\bar{e}^i,..,x_i\cdot x_{i_m}\bar{e}^{i_m}\right)$, тогда имеем $\Delta\Omega^m(\bar{x}) \equiv \Omega^m(\bar{x}+\Delta\bar{x}) - \Omega^m(\bar{x}) \cong d\Omega^m(\bar{x})\perp\Delta\bar{x}$, т.е. дифференциал служит характеристикой предельного приращения сечения расслоения L пространством пучков граней.

В заключение отметим, что настоящие функторные построения вполне могут быть приняты в качестве основополагающих для гомологической алгебры и дифференциальной теории гомологий.